CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Kyoto University Research Information Repository
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository
KYOTO UNIVERSITY

Title	平方根の最良第一近似式 (計算の手間と能率化)
Author(s)	浜田, 穂積
Citation	数理解析研究所講究録 (1974), 215: 87-94
Issue Date	1974-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/105253
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
215巻 1974年 87-94

平方根の最良第一近似式

日立 システム研 浜田穂積

§1. はじめに

平方根の計算方法についてはすでに多くの議論があり、かなりまとまった論文もある[1]。しかしそれにもかかわらず、一般に使用されるサブルーチンの作成者の立場からいって、完全でない点があるので、その点を改良したものを示す。

ここで述べるのは、通常の数値計算的手法によるもので、まず第一近似値 y_0 を求めて、それにいわゆるニュートンの逐次近似式

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \tag{1}$$

を適用して、必要な精度が得られるまで繰返すことによって結果を得ようとする場合に、ある定まった区間における第一近似式 y_0 を x のどのような関数とすればよいか、という問題である。

従来の理論は(1)を用いない前の y_0 について、相対誤差

を最小にするもので、この場合には(1)を適用すると最良にならないものであった。あるいは(1)の繰返しを考慮したものもあった[2]が、説明は明解でなかった。

ソフトウェアのメーカが作成する組込み関数の中にある平方根のルーチンなどの場合は、ほとんど(1)の繰返しが使われているので、これの理論づけをする。

§2. 繰返し計算の結果の誤差

(1)の繰返し式は、非線型の一階差分方程式とみることができる。(ニュートンの逐次近似式はすべてそうである。)この場合は次のように変形すれば解けることがわかる。実はこれがこの小論の眼目である。

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{y_0-\sqrt{x}}{y_0+\sqrt{x}}\right)^{2^n} \qquad (2)$$

ここで

$$E(x)=\frac{y_0(x)-\sqrt{x}}{y_0(x)+\sqrt{x}} \qquad (3)$$

とおけば

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left\{E(x)\right\}^{2^n} \qquad (4)$$

となるが、この式の右辺を ε_n とおけば

$$y_n = \frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\sqrt{x} \tag{5}$$

となって、$|E(x)| < 1$ であれば、n が大になるほど ε_n が 0 に近づいて、y_n が $\sqrt{x}$ に近くなることがわかる。$|E(x)| < 1$ という仮定は、平方根の値を求めようとするときは通常正しいと考えてさしつかえない。ちなみに y_n を最終的な $\sqrt{x}$ の近似値とする場合の相対誤差は次の通りである。

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n} \tag{6}$$

(6) の右辺は、$|E(x)| < 1$ で、かつ $n \geq 1$ のとき $0 \leq \varepsilon_n < 1$ であるから、ε_n の最大で最大となる。したがって、相対誤差を最小にするには $|E(x)|$ の最大値を最小にすればよい。これは (3) に関する最良近似の問題となる。

以下に $y_0(x)$ として、通常用いられる実用的な関数形について係数を定めるが、$\sqrt{x}$ の性質から、近似区間のとり方を

$$\alpha^{-2} \leq x \leq \alpha^2 \tag{7}$$

とすれば見通しがよくなる。一般的な近似区間については後述のようにこの区間に還元可能なので、(7) は一般性を失なうものではない。また (3) の持つ対称性を利用して、関数形を天下り的に、係数の個数の少ない形にしてあるが、こうしてよいことは簡単にわかる。こうすることによって計算の自由度が減少して扱いやすくなる。

§3. 最良第一近似式

(i) $y_0=\frac{1}{A}(x+1)$ の形式

E(x) は $x=1$ で最小、$x=\alpha^{-2}$ と α^2 とで最大となる。このことから

$$E(1)+E(\alpha^2)=0$$

を解いて、Aは次の通りであると計算される。

$$A=\sqrt{2\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)} \tag{8}$$

(ii) $y_0=\frac{Bx+1}{x+B}$ の形式（$B\geq 3$）

これは $B=3$ のとき、$x=1$ におけるパデ展開の最も簡単な場合となるものである。x を逆数にすると E(x) の符号が変ることを利用して、$x>1$ において E(x) が極値をとる x を β^2 とするとき

$$E(\alpha^2)+E(\beta^2)=0$$

$$E'(\beta^2)=0$$

の両式を、α^2 をパラメータとして、B, β^2 に関して解く。この場合も B は α の関数であるが、簡単には表わせないので、数値的に解く方が早道であろう。

(iii) $y_0=\frac{x^2+2Cx+1}{D(x+1)}$ の形式

この場合も上と同様に、対称性を利用して解くと

$$C=\alpha+\frac{1}{\alpha}+1 \tag{9}$$

$$D=\sqrt{2(C+1)}\sqrt{2(C-1)} \tag{10}$$

のように比較的簡単に表わせる。

§4、 係数と誤差定数の表

誤差の評価は、誤差定数を次のように定義[2]すれば、(4),(5),(6)から容易に得られる。

$$\rho = \max_{\alpha^{-2} \leq x \leq \alpha^{2}} |E(x)| \tag{11}$$

次に実用的に用いられる α^4 (α^2 と α^{-2} の比として)の値についての係数と誤差定数を表1〜3に示す。ただし誤差定数については、実用上の便宜のため $-\log_2 \rho$ の値で示す。

表1. $y_0 = \frac{1}{A}(x+1)$ の係数と誤差定数

α^4	A	$-\log_2 \rho$
2	2.014995548	8.06
4	2.059767144	6.09
10	2.163617681	4.67
16	2.236067977	4.17
100	2.637614614	2.86
256	2.915475947	2.42

表2. $y_0=\frac{Bx+1}{x+B}$ の係数と誤差定数

α^4	B	$-\log_2 \rho$
2	3.022535406	12.60
4	3.090315520	9.63
10	3.250345474	7.50
16	3.364251725	6.75
100	4.027051447	4.79
256	4.514369935	4.14

表3. $y_0=\frac{x^2+2Cx+1}{D(x+1)}$ の係数と誤差定数

α^4	C	D	$-\log_2 \rho$
2	3.030103530	4.030047312	17.13
4	3.121320343	4.120427218	13.17
10	3.340620735	4.333922881	10.34
16	3.500000000	4.486046344	9.33
100	4.478505426	5.375906617	6.73
256	5.250000000	6.036841008	5.85

§5. 応用

実用的には近似区間として(7)のようにとることは少ないであろう。一般的に近似区間を

$$a \leq x \leq b \tag{12}$$

とする場合は

$$\alpha^4 = b/a \tag{13}$$

となるようにαを定めて計算する。そして

$$u = \sqrt{ab}\ , \ v = \sqrt{u} \tag{14}$$

として、x, y の代りにそれぞれ x/u, y/v とおいたものを近似式とすればよい。また、§4 の(ii),(iii)の場合には、分母で割った形で用いるのがよいことが多いであろう。

最後に蛇足であるが、表2において $\alpha^4 = 100$ のときのBの値が4に近いことから、逆に $0.1 \leq x \leq 10$ での第一近似式を

$$y_0 = \frac{4x+1}{x+4} \tag{15}$$

とした場合を考えてみると、最良近似ではないが、それに非常に近いことがわかる。ちなみにこれから誤差定数を計算してみると

$$\rho = 3.837 \times 10^{-2} \tag{16}$$

となるので、(15)から出発して、(1)の繰返し2回で10進5桁、3回で10進11桁の精度で平方根が得られることがわかる。(15)は記憶に便利な式であるので、平方根のキーを持たない電子式卓上計算機(電卓)で平方根を計算するのに便利であろう。

参考文献

[1] 二宮市三：平方根の有理関数近似、情報処理 8 (1967) pp. 23-30

[2] C. T. Fike: Computer Evaluation of Mathematical Functions, Prentice-Hall Inc., (1968)